به نام او

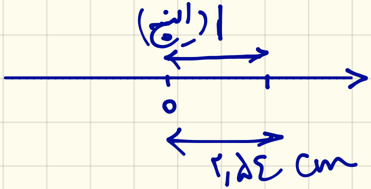
ریاضی عمومی ۱

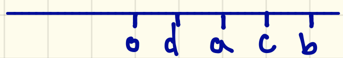
جلسه ۱

اعداد

شمردن ۱، ۲، ۳، ...

اندازه‌گیری کمیت‌های پیوسته





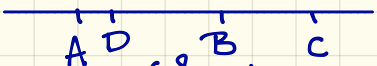
طول پاره‌خط ob دو برابر oa است.

نسبت کمیت‌های هم‌جنس

طول oc ۱٫۵ برابر oa است.

$$|oa| = 2|od| \quad , \quad |oc| = 3|od|$$

$$2|oc| = 6|od| = 3|oa| \Rightarrow |oc| = \frac{3}{2}|oa|$$



آیا نقطه‌ای مانند D وجود دارد که |AB| و |AC| مضرب صحیحی از |AD| باشد؟

تعریف: دو کمیت هم‌جنس را متوافق گوییم هرگاه بتوان کمیتی هم‌جنس آن‌ها یافت که هر دو مضرب صحیحی از آن باشند.

سوال: آیا هر دو کمیت هم جنس متوافق هستند؟

a, b دو کمیت هم جنس $\exists c$?

$a = mc \quad b = nc$ m, n طبیعی

$na = nmc = mb \Rightarrow b = \frac{n}{m} a$

مثال 1 (استدلالی جبری) $a = 1$ $b = \sqrt{2}$

ضلع یک مربع قطر همان مربع

$(\frac{b}{a})^2 = 2$

$\frac{b}{a} = \frac{n}{m}$

$(n, m) = 1$

حداقل یکی از n, m زوج نیستند

$2 = (\frac{b}{a})^2 = \frac{n^2}{m^2} \Rightarrow 2m^2 = n^2 \Rightarrow n$ زوج $: n = 2k$

$\Rightarrow 2m^2 = (2k)^2 = 4k^2 \Rightarrow m^2 = 2k^2 \Rightarrow$ m زوج

$\times$

مثال (استدلالی هندسی).

	۱	۲	۲	
۶۳c	۴۵c	۱۸c	۹c	۰
۴۵c	۳۶c	۱۸c		

c: بزرگترین مقسوم علیه مشترک a و b است. $\underbrace{a = mc \quad b = nc}$

الگوریتم اقلیدسی. فرض کنید a_0 و a_1 دو کمیت هم جنس باشند. $(a_0 \geq a_1)$

n_1: بزرگترین عدد طبیعی که $n_1 a_1 \leq a_0$ یعنی $(n_1+1)a_1 > a_0$: $a_2 := a_0 - n_1 a_1$

n_k: بزرگترین عدد طبیعی که $n_k a_k \leq a_{k-1}$ یعنی $(n_k+1)a_k > a_{k-1}$ $a_{k+1} := a_{k-1} - n_k a_k$

اگر زمانی یک a_k برابر صفر شود اصطلاحاً الگوریتم پایان می‌یابد.

قضیه: a_0 و a_1 متوافقند $\Longleftrightarrow$ الگوریتم اقلیدس پایان یابد.

اثبات. $a_0 = n_1 a_1 + a_2$ $\quad \Longrightarrow \exists k: \; a_k = 0$

$\vdots$

$a_{k-3} = n_{k-2} a_{k-2} + a_{k-1}$ $\Longrightarrow$ a_0 و a_1 متوافق

$a_{k-2} = n_{k-1} a_{k-1} + \cancel{a_k}\,0$

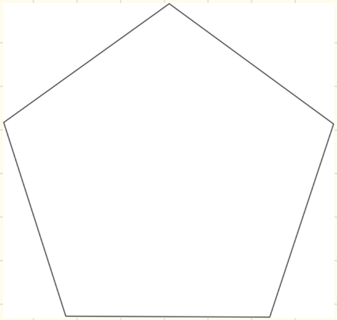
a_0, a_1 مضرب طبیعی از a_{k-1} هستند.

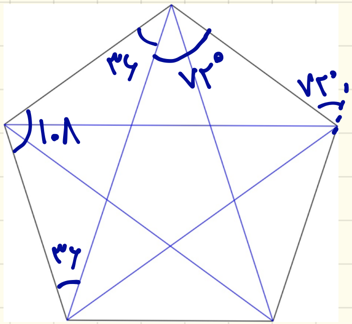
⇐ فرض کنید کمیت هم جنسِ C وجود دارد که $a_0 = m_0 c$ $\quad a_1 = m_1 c$ $\quad$ (m_1, m_0 طبیعی)

$$\underbrace{a_0}_{m_0 c} = \underbrace{n_1 a_1}_{n_1 m_1 c} + \underbrace{a_2}_{m_2 c} \qquad a_2 < a_1 \Rightarrow m_2 < m_1$$

$$\Rightarrow a_3 = m_3 c \qquad m_3 < m_2$$

$$m_0 > m_1 > m_2 > \dots \qquad \exists k : m_k = 0$$





$A'BAE$

$|AB| = |A'E|$

$a_0 = |CE|$

$a_1 = |AB|$

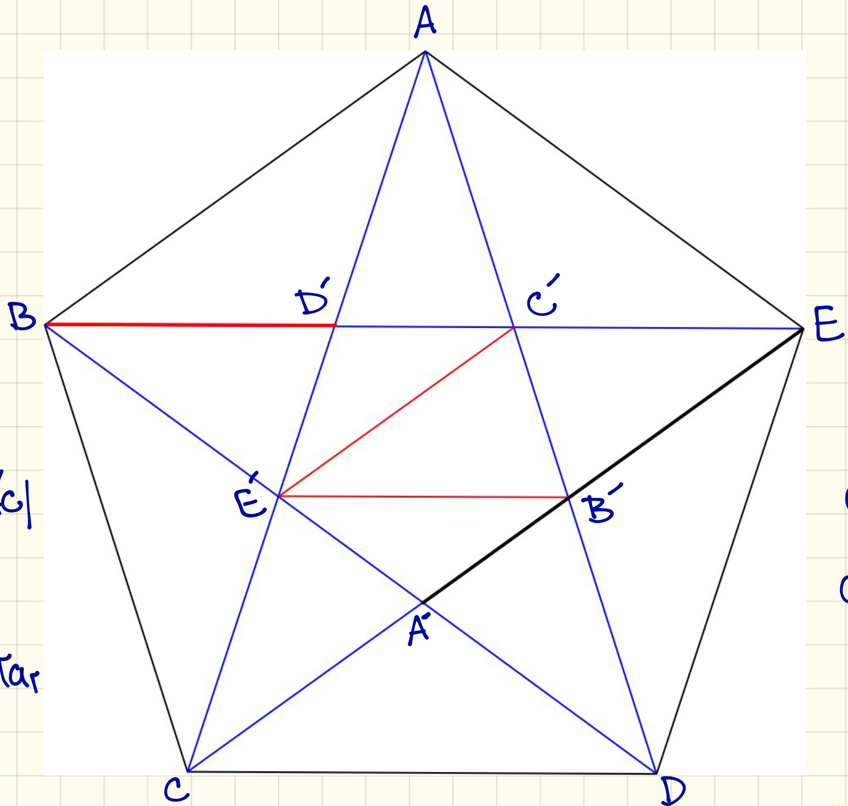
$a_1 < a_0 < ۲a_1$

$a_2 = a_0 - a_1 = |A'C'|$

$a_2 < a_1 < ۲a_2$

$a_1 = |BD'| + \underbrace{|D'C'|}_{<|BD'|} < ۲a_2$

$a_3 = a_1 - a_2$



$a_2 = |E'B'|$

$a_3 = |D'C'|$

$\frac{a_0}{a_1} = \frac{a_2}{a_3}$

$\Downarrow$

الگوریتم اقلیدس پایان نمی‌یابد $\Leftarrow$ قطر و ضلع پنج‌ضلعی منتظم نامتوافقند.

کسرهای مسلسل :

الگوریتم اقلیدسی. فرض کنید a_0 , a_1 دو کمیت هم جنس باشند. $(a_0 \geq a_1)$

n_1 : بزرگترین عدد طبیعی که $n_1 a_1 \leq a_0$ یعنی $(n_1+1)a_1 > a_0$: $a_2 := a_0 - n_1 a_1$

n_k : بزرگترین عدد طبیعی که $n_k a_k \leq a_{k-1}$ یعنی $(n_k+1)a_k > a_{k-1}$ $a_{k+1} := a_{k-1} - n_k a_k$

$$\frac{a_0}{a_1} = n_1 + \frac{a_0 - n_1 a_1}{a_1} = n_1 + \frac{1}{\frac{a_1}{a_2}} = n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{a_3}{a_2}}$$

$$n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 \dots}}$$

$$\frac{a_0}{a_1} = c_0$$

$$\frac{a_0}{a_1} = c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \dots$$

$$\frac{10}{7} = 1 + \frac{4}{10} + \frac{2}{10^2} + \dots$$

$1,42\dots$

عددنویسی در یک مبنا.

a_0 a_1

۱۰ | ۷

۷   ۱٫۴۲

۳۰

۲۸

۲۰

۱۴

...

۱,۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰۱۱۰ … → عدد گویا نیست

$C_0, C_1, C_2 C_3 \ldots$