به نام او

ریاضی مهندسی

جلسه اول، ۹۱/۱۱/۱۴

به نام او

PDE : معادلات دیفرانسیل پاره‌ای

توابع مختلط

میان‌ترم : ۹۲,۲,۲۶ ساعت ۱۸ : ۱۰ نمره، از PDE

Advanced Engineering Mathematics

Erwin KREYSZIG 9th edition

Part C & D

Fourier analysis & PDE

complex Analysis

آنالیز فوریه :

پدیده تناوبی

سری تیلور :

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ هموار

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n \qquad b_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

متناوب با دوره تناوب P :

$\sin x$, $\cos x$, $tg\, x$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ متناوب $\quad \exists p>0 \quad f(x+p) = f(x)$

تناوب P ⇐ تناوب KP : $K \in \mathbb{N}$

توابع مثلثاتی : متناوب با تناوب $K2\pi$ ، تابع ثابت متناوب با هر دوره تناوبی

توابع مثلثاتی : $\sin nx$ ، $\cos nx$: $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2\pi$-متناوب

توابع $f_1, \dots, f_k$ P_متناوب

$\forall a_i \in \mathbb{R} \quad \sum_{i=1}^{k} a_i f_i \to$ P_متناوب

توابع $f_1, \dots, f_k, \dots$ P_متناوب

$\forall a_i \in \mathbb{R} \quad g := \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i \to$ P_متناوب

در صورت تعریف

اگر g در نقطه x تعریف شده باشد، آنگاه

$$g(x) = g(x+P)$$

$$(*) \quad g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \to 2\pi\text{-متناوب}$$

آنالیز فوریه : f تابعی 2π-متناوب $\Rightarrow$ نمایش f به صورت $(*)$

سری تیلور : $1, x, x^2, x^3, \dots$ $\quad f(x) \simeq \sum a_i x^i$

قضیه ① : f تابعی 2π-متناوب و "خوب" باشد آنگاه،

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

و

$$a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \qquad n \geq 1$$

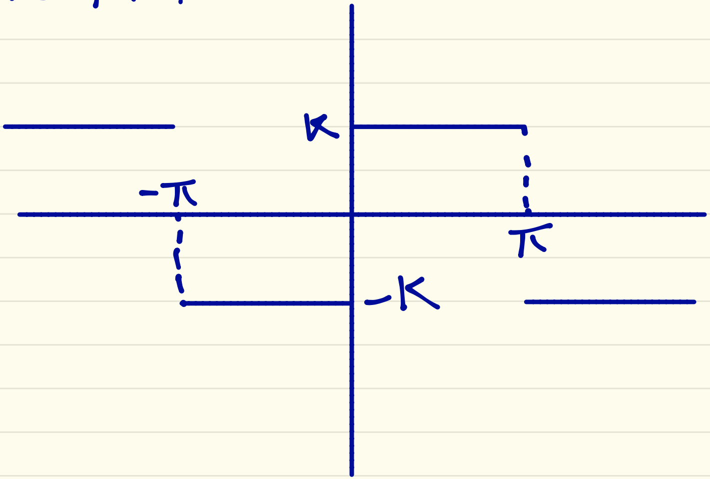
$$b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \qquad n \geq 1$$

در تخمین سری فوریه اگر دو تابع f و g در متناهی نقطه متفاوت باشند
این دو تابع را یکسان در نظر می‌گیریم.

$$f(x) := \begin{cases} k & 0<x<\pi \\ -k & -\pi<x<0 \end{cases}$$

k مقدار ثابت

$$f(x+2\pi) := f(x)$$



$$a_0 := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -k\,dx + \int_0^{\pi} k\,dx\right) = 0$$

$$n \geq 1 \quad a_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -K\cos nx + \int_0^{\pi} K\cos nx\,dx\right) = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -K\sin nx\,dx + \int_0^{\pi} K\sin nx\,dx\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} K\sin nx\,dx = \frac{2K}{\pi}\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)_0^{\pi} = \frac{2K}{\pi}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{1}{n}\right)$$

زوج $n \Rightarrow b_n = 0$ فرد $n \Rightarrow \frac{4K}{n\pi}$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4K}{2n+1}\,\frac{\sin[(2n+1)x]}{\pi}$$

$$= \frac{4K}{\pi}\left[\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots\right]$$