به نام او

ریاضی مهندسی

جلسه دوم، ۹۱/۱۱/۱۴

فرض: اگر برای تابع 2π - متناوب f داشته باشیم

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

آنگاه،

$$a_0 := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{\langle f,1\rangle}{\langle 1,1\rangle}$$

فرمول اویلر

$$a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{\langle f,\cos nx\rangle}{\langle \cos nx,\cos nx\rangle} \quad n\geq 1$$

$$b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{\langle f,\sin nx\rangle}{\langle \sin nx,\sin nx\rangle} \quad n\geq 1$$

اثبات:

لم: خانواده توابع $\{\sin nx, \cos mx \mid n\geq 1,\ m\geq 0\}$ خانواده‌ای متعامد است. یعنی اگر f و g دو تابع متفاوت از این خانواده باشد، آنگاه،

$$\langle f,g\rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx = 0$$

مرور بر ریاضی عمومی:

$$A=(a_1,\ldots,a_n) \quad , \quad B(b_1,\ldots,b_n)$$

$$A\perp B \iff A\cdot B = 0 = \sum a_i b_i$$

ادامه مرور ریاضی عمومی

$\{A_k\}_{k=1}^{n}$ $\mathbb{R}^n$ پایه متعامد

$$V\in\mathbb{R}^n \Rightarrow V=\sum_{i=1}^{n}\frac{(V\cdot A_i)\times A_i}{|A_i|^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{V\cdot A_i}{A_i\cdot A_i}A_i$$

اثبات لم:

$$\sin(n+m)x=\sin nx\cos mx+\sin mx\cos nx$$

$$\sin(n-m)x=\sin nx\cos mx-\sin mx\cos nx$$

$$\frac{1}{2}\left[\sin(n+m)x+\sin(n-m)x\right]=\sin nx\cos mx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\left[\sin(n+m)x+\sin(n-m)x\right]dx$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{-1}{n+m}\cos(n+m)x+\frac{-1}{n-m}\cos(n-m)x\right]_{-\pi}^{\pi}=0$$

$$n\neq m \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = 0$$

$$\frac{1}{2}\left(\cos(n+m)x + \cos(n-m)x\right)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(\cos 2nx + 1)\, dx$$

$$\frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{2n} \sin 2nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + x \Big|_{-\pi}^{\pi}\right] = \pi$$

اثبات قضیه

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad (1)$$

ریاضی عمومی

$$(A+B).C = A.C + B.C$$

دو طرف رابطه (1) را در $\cos mx$ ضرب داخلی کنید

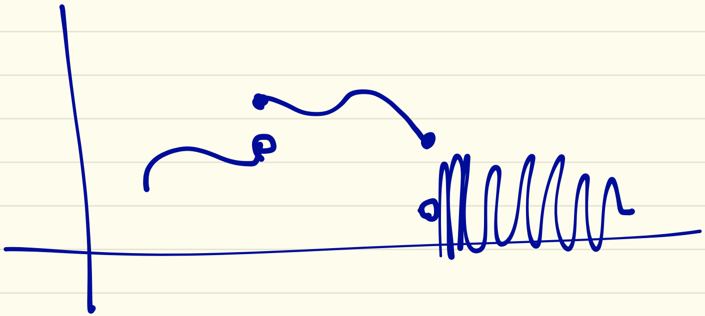
$$\langle f(x), \cos mx \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \langle \cos nx, \cos mx \rangle + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \langle \sin nx, \cos mx \rangle$$

$$= a_m \langle \cos mx, \cos mx \rangle \Rightarrow a_m = \frac{\langle f(x), \cos mx \rangle}{\langle \cos mx, \cos mx \rangle}$$

قضیهٔ نمایش با سری فوریه:

فرض کنید f تابعی 2π-متناوب و قطعه قطعه پیوسته در $[-\pi,\pi]$ باشد و همچنین فرض کنید حد چپ و راست تابع در همهٔ نقاط $[-\pi,\pi]$ وجود داشته باشد. آنگاه سری فوریهٔ تابع در نقاط پیوستگی به خود تابع و در نقاط ناپیوستگی به میانگین حد چپ و راست میل می‌کند.

تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ را قطعه قطعه پیوسته گوییم هرگاه متناهی نقطهٔ $a\leq c_1<c_2\ldots<c_k\leq b$ وجود داشته باشد که تابع f در بازه‌های (c_i,c_{i+1}) پیوسته باشد.

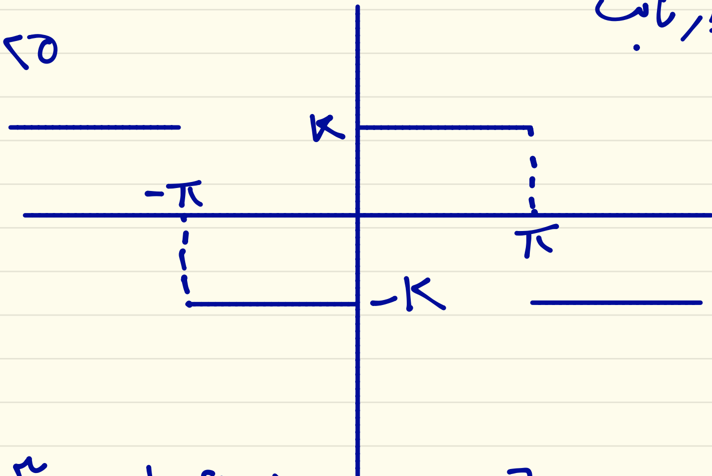


تکرار مثال جلسه قبل

K مقدار ثابت

$$f(x) := \begin{cases} K & 0<x<\pi \\ -K & -\pi<x<0 \end{cases}$$

$$f(x+2\pi) := f(x)$$



$$f(x) = \frac{4K}{\pi}\left[\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots\right]$$

$$x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow K = \frac{4K}{\pi}\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\cdots\right]$$

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots = \frac{\pi}{4}$$

مرور بر ریاضی عمومی :

$\{v_i\}_{i=1}^{m}$ متعامد یکه در $\mathbb{R}^n$ باشند.

$$v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i$$

$$|v|^2 = v \cdot v = \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i\right)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \alpha_j (v_i \cdot v_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2 (v_i \cdot v_i) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$a_0\sqrt{2\pi} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\sqrt{\pi}\,\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sqrt{\pi}\,\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}$$

$$\|f\|^2 = \langle f, f\rangle = 2\pi a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \pi a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \pi b_n^2$$