به نام او

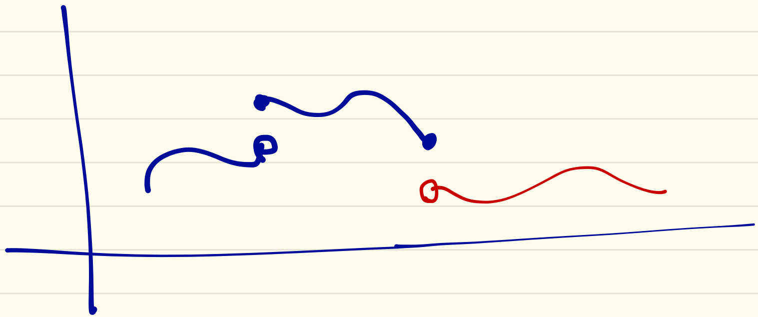
ریاضی مهندسی

جلسه سوم، ۹۱/۱۱/۲۳

قضیهٔ نمایش با سری فوریه:

فرض کنید f تابعی 2π-متناوب و قطعه‌قطعه پیوسته در $[-\pi,\pi]$ باشد و همچنین فرض کنید مشتق چپ و راست تابع در همهٔ نقاط $[-\pi,\pi]$ وجود داشته باشد. آنگاه سری فوریهٔ تابع در نقاط پیوستگی به خود تابع و در نقاط ناپیوستگی به میانگین حد چپ و راست میل می‌کند.

تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ را قطعه‌قطعه پیوسته گوییم هرگاه متناهی نقطهٔ $a\leq c_1<c_2\dots<c_k\leq b$ وجود داشته باشد که تابع f در بازه‌های (c_i,c_{i+1}) پیوسته باشد.



$$f(x) = \begin{cases} K & 0 < x < \pi \\ -K & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{4K}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots \right)$$

$$\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = 2\pi K^2$$

$$\Rightarrow 2\pi K^2 = \pi \,\frac{16K^2}{\pi^2}\left[1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots \right]$$

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

f تابع 2L-متناوب

$$f(x)=f(x+2L)$$

$$g(y):=f\left(y\times\frac{L}{\pi}\right)$$

$$g(y+2\pi)=f\left(\frac{L}{\pi}(y+2\pi)\right)=f\left(\frac{L}{\pi}y+2L\right)=f\left(\frac{L}{\pi}y\right)=g(y)$$

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx=f\left(\frac{L}{\pi}x\right)\qquad(*)$$

$$a_0:=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\,dx$$

فرمول اویلر

$$a_n:=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\cos nx\,dx$$

$$b_n:=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\sin nx\,dx$$

با جایگذاری x بجای $\frac{L}{\pi}x$ در رابطهٔ $(*)$ خواهیم داشت $\frac{L}{\pi}x =: y$

$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{L}{\pi}x\right) dx$$

$$\xrightarrow{y := \frac{L}{\pi}x} \frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L} f(y)\frac{\pi}{L}\, dy = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(y)\, dy$$

$n \geq 1$ $$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(y)\cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(y)\sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy$$

قضیهٔ نمایش با سری فوریه:

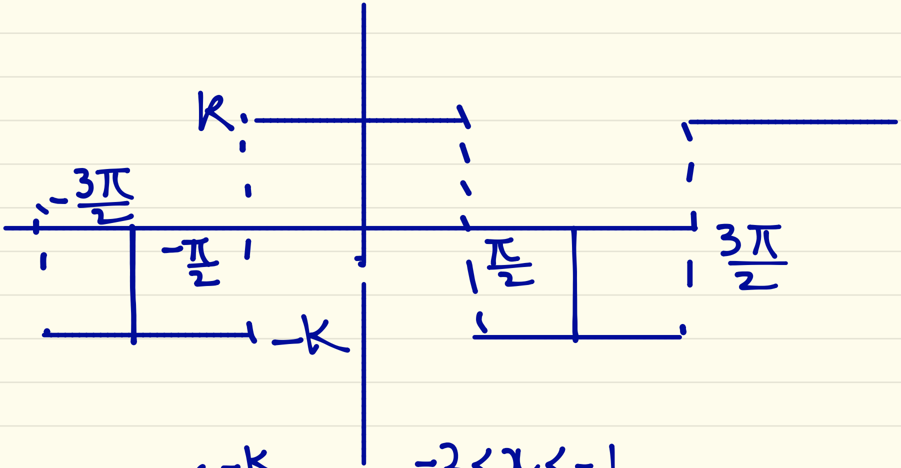
فرض کنید f تابعی $2L$-متناوب، قطعه قطعه پیوسته در $[-L,L]$ باشد و همچنین فرض کنید مشتق چپ و راست تابع در همهٔ نقاط b در $[-L,L]$ وجود داشته باشد. آنگاه سری فوریهٔ تابع در نقاط پیوستگی به خود تابع و در نقاط ناپیوستگی به میانگین حد چپ و راست میل می‌کند که سری فوریهٔ یک تابع $2L$-متناوب به صورت زیر است

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, \qquad n\geq 1$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$



حل

$$f(x) = \begin{cases} -K & -2<x<-1 \\ K & -1<x<1 \\ -K & 1<x<2 \end{cases}$$

$$L=2 \Rightarrow 2L=4$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \frac{1}{4}\left(\int_{-2}^{-1} -k\,dx + \int_{-1}^{1} k\,dx + \int_{1}^{2} -k\,dx\right) = 0$$

$n \geq 1 \quad a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \int_{0}^{2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$

$$= \int_0^1 k\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx - \int_1^2 k\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= k\,\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1 - K\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_1^2$$

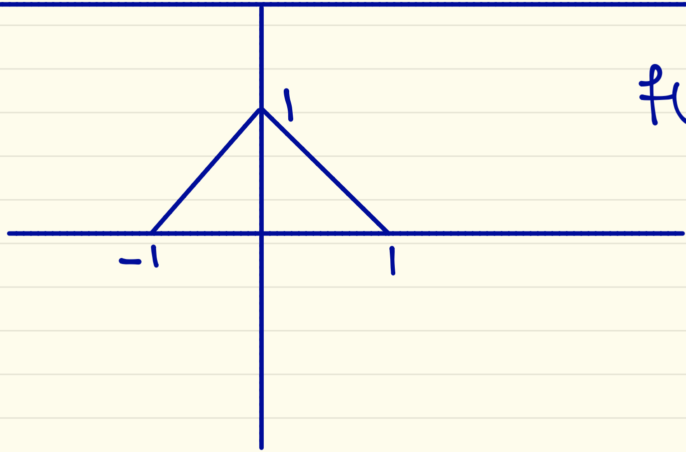
زوج $n \Rightarrow a_n = 0$

$n = 2m+1 \Rightarrow$

$$a_{2m+1} = \frac{2K}{(2m+1)\pi}\left((-1)^m - 0 - \left[0 - (-1)^m\right]\right) = \frac{4K}{(2m+1)\pi}(-1)^m$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx = 0$$

$$f(x) = \frac{4K}{\pi}\left(\cos x - \frac{\cos\frac{3\pi x}{2}}{3} + \frac{\cos\frac{5\pi x}{2}}{5} - \frac{\cos\frac{7\pi x}{2}}{7} + \cdots \right)$$



$$f(x) = \begin{cases} x+1 & -1<x<0 \\ 1-x & 0<x<1 \end{cases}$$

کسینوس

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int \cdots$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int \cdots$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int \cdots$$